



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística

## Aplicações dos modelos ARMA a dados financeiros

Samille Amaral Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Brasília  
2016



**Samille Amaral Santos**

## **Aplicações dos modelos ARMA a dados financeiros**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. **Jhames Matos Sampaio**

**Brasília**  
**2016**



# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus.

Aos meus pais, por terem investido em minha educação desde as séries iniciais, com excelentes escolas e cursos de idiomas. Obrigada pela assistência nos momentos mais difíceis e pelo amor incondicional. A vocês minha eterna gratidão.

Ao meu irmão e grande amigo, por todos os conselhos, pela amizade, paciência e por sempre se mostrar disponível para tirar minhas dúvidas sobre mercado financeiro.

Aos meus amigos, pelo apoio e pelas longas tardes de estudo ao longo dessa jornada na Estatística. Em especial, a Márcia Maia, Yuri Medeiros, Gabriel Brunello e Pedro Rangel.

A Felipe Susini, por sempre me incentivar, ouvir e me proporcionar bons momentos de descontração. Obrigada pela paciência durante esse período e pela amizade verdadeira.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Estatística na Universidade de Brasília. Em especial, gostaria de agradecer a três professores pelo grande auxílio durante meu curso: Lúcio José Vivaldi, Raul Yukihiro Matsushita e Maria Teresa Leão Costa.

Ao meu orientador Jhames Matos Sampaio, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho.



# Resumo

O objetivo desta pesquisa é obter um modelo ARMA (p,q) que melhor se adapte ao banco de dados dos ativos financeiros, Usim5. O estudo considerou uma amostra de 3899 observações no período de 2000 a 2016. Serão realizadas análises, no decorrer do trabalho, com diferentes distribuições de probabilidade aplicadas aos resíduos, como a distribuição Normal, t de Student, Laplace e  $\alpha$ -estável. No final, será feita uma análise comparativa entre os quatro modelos gerados, indicando qual seria a possível distribuição que geraria melhores estimativas. Toda a análise foi realizada pelo software livre R.

**Palavras-chave:** Séries Temporais, Modelo ARMA, Distribuições com Caudas pesadas, Ativos Financeiros, Usiminas.





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução e Justificativa</b>	<b>1</b>
	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão de Literatura</b>	<b>3</b>
2.1	Função de autocorrelação e autocovariância . . . . .	3
2.2	Estacionariedade . . . . .	3
2.3	Retorno de Ativos . . . . .	4
2.4	Características Importantes . . . . .	5
2.5	Identificação . . . . .	5
2.6	Ruído Branco . . . . .	6
2.7	Método de Máxima Verossimilhança . . . . .	7
2.8	AIC e BIC . . . . .	7
2.9	Função Acumulada Empírica . . . . .	8
2.10	Função Acumulada . . . . .	8
2.11	Quantis . . . . .	9
2.12	Médias Móveis . . . . .	9
2.13	Modelo Autoregressivo . . . . .	9
2.14	ARMA(p,q) . . . . .	9
2.15	ARIMA(p,d,q) . . . . .	10
2.16	Distribuição Normal . . . . .	10
2.17	Distribuição t de Student . . . . .	11
2.18	Distribuição Laplace . . . . .	11
2.19	Distribuições Estáveis . . . . .	12
2.20	Teste de Box-Ljung-Pierce . . . . .	14
2.21	Teste de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>17</b>
3.1	Análise dos Ativos Financeiros (Usim5) . . . . .	17
3.1.1	Distribuição Normal . . . . .	21
3.1.2	Distribuição t de Student . . . . .	22

3.1.3	Distribuição Laplace . . . . .	23
3.1.4	Distribuição $\alpha$ -estável . . . . .	24
3.1.5	Funções Acumuladas e Teste de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>29</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>30</b>

# Lista de Figuras

2.1	Índice de estabilidade . . . . .	13
2.2	Parâmetro de assimetria . . . . .	14
2.3	Parâmetro de escala . . . . .	14
2.4	Parâmetro de posição . . . . .	14
3.1	Preço de fechamento do ativo (Usim5). . . . .	18
3.2	Log-retornos do ativo (Usim5). . . . .	18
3.3	Função de autocorrelação dos resíduos. . . . .	19
3.4	Função de autocorrelação parcial dos resíduos. . . . .	19
3.5	Função de densidade da Normal e t de Student ajustada ao histograma dos log-retornos. . . . .	21
3.6	Função de densidade Laplace e $\alpha$ -estável ajustadas ao histograma dos log-retorno. . . . .	21
3.7	Gráfico quantil-quantil com resíduos ajustados na distribuição Normal do modelo ARMA(2,1). . . . .	22
3.8	Gráfico quantil-quantil com resíduos ajustados na distribuição t de Student do modelo ARMA(2,1). . . . .	23
3.9	Gráfico quantil-quantil com resíduos ajustados na distribuição Laplace do modelo ARMA(2,1). . . . .	24
3.10	Gráfico quantil-quantil com resíduos $\alpha$ -estável do modelo ARMA(2,1) ajustado. . . . .	25
3.11	Comparação entre as distribuições acumuladas dos log-retornos (Normal em verde, t de Student em azul, Laplace em vermelho e $\alpha$ -estável em roxo). . . . .	26
3.12	Comparação nas caudas das distribuições acumuladas dos log-retornos (Normal em verde, t de Student em azul, Laplace em vermelho e $\alpha$ -estável em roxo). . . . .	26



# Lista de Tabelas

3.1	Possibilidades de modelos ARMA com seus respectivos AIC, BIC e teste de Box-Ljung-Pierce. . . . .	20
3.2	Coeficientes do modelo ARMA(2,1). . . . .	20
3.3	Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição normal. . . . .	22
3.4	Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição t de Student. . . . .	23
3.5	Coeficientes do modelo ARMA(2,1) ajustado na distribuição t de Student. . . . .	23
3.6	Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição Laplace. . . . .	24
3.7	Coeficientes do modelo ARMA(2,1) ajustado na distribuição Laplace. . . . .	24
3.8	Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição $\alpha$ -estável. . . . .	25
3.9	Coeficientes do modelo ARMA(2,1) ajustado na distribuição $\alpha$ -estável. . . . .	25
3.10	Resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov para as distribuições. . . . .	27



# Capítulo 1

## Introdução e Justificativa

No decorrer deste trabalho, será efetuada uma análise sobre as ações da maior empresa siderúrgica do Brasil (Usiminas). O motivo da escolha dessa variável surgiu em virtude da atual crise econômica do país que é responsável por grandes prejuízos em empresas nacionais.

O setor siderúrgico tem um papel estratégico importante na economia do Brasil. Em 2012, esse setor chegou a representar 4% do Produto Interno Bruto (PIB) nacional. Seu desenvolvimento representou a independência industrial do país.

O Brasil, segundo a *PricewaterhouseCoopers (PwC)*, costumava ser o 9º maior produtor de aço no mundo, com um parque siderúrgico de 29 usinas. Realizava exportações para cerca de 100 países.

A líder no mercado mundial, no entanto, é a China, que chegou a ter uma produção de 46,3% de aço no mundo, em 2012, e corresponde a 84% do aumento da produção mundial de 2001 a 2010, segundo o Instituto de Aço Brasil. Além de ter uma produção em grande escala, o preço do produto gerado pela China é mais acessível. Contudo, a redução da demanda dos Estados Unidos e a grande produção no mercado mundial deram origem à sobreoferta de aço no mundo.

Os fatores externos supracitados contribuíram para a redução da competitividade no Brasil. Sabe-se também que a elevada carga tributária, a taxa de câmbio, a acumulação de impostos e a ausência de estrutura adequada são fatores internos que agravaram essa situação. Além disso, o mercado interno percorre grandes dificuldades. Ainda segundo a *PricewaterhouseCoopers (PwC)*, mais de 80% do consumo do país é representado pelo setor de construção civil, automotivos, máquinas e equipamentos. Como esses setores têm passado por um momento de baixa demanda, o setor siderúrgico fica ainda mais afetado.

A crise na construção civil tem como causa a falta de espaço nas grandes cidades, as altas taxas de juros e a crise econômica no país, o que prejudica a venda e compra, e isso tem resultado em um grande estoque de imóveis. O setor automobilístico, que desfrutou por muitos anos de um vasto crescimento no Brasil (com um baixo custo de mão-de-obra), tem sido absorvido pelo efeito de escala de crescimento e acompanhado

pela crise econômica. Esse setor também presencia a crise. Com esse aglomerado de situações, o mercado de importação do aço tem declinado.

Com esse aglomerado de situações, o mercado de importação do aço vive seu declínio. A Usiminas é a maior empresa siderúrgica do Brasil e sofre as grandes consequências geradas pela crise internacional e nacional. Suas ações, que já chegaram a custar mais de 60 reais, hoje custa menos de 2 reais. Essa instabilidade na precificação produz uma grande queda na economia do país.

Uma análise mais profunda para esse aspecto econômico, mediante esse contexto, torna-se indispensável. Estudos sobre o comportamento de ativos financeiros começaram a se desenvolver no século XX. Em 1976, a dupla de ingleses George E. P. Box e Gwilym M. Jenkins reproduziu o método onde se aplica o modelo autorregressivo com o de médias móveis (ARMA e ARIMA). Esses modelos têm sido amplamente usados devido ao aumento da especulação financeira. No atual cenário econômico do país, o método de Box e Jenkins colabora para se examinar a atuação dos ativos.

Com isso, o presente trabalho visa investigar o comportamento dos resíduos do ativo da Usiminas, fazendo uso do modelo ARIMA com distribuição normal, distribuição t de Student, Laplace e  $\alpha$ -estável, buscando, assim, identificar a distribuição mais adequada.



# Capítulo 2

## Revisão de Literatura

A metodologia que será usada mescla e ajusta dois tipos de modelos, o modelo autorregressivo integrado e de médias móveis, formando assim o ARIMA (p,d,q). Entretanto, para compreender melhor esse modelo, alguns conceitos básicos precisam estar definidos. Com isso, neste capítulo, serão apresentados elementos conceituais e metodológicos como a função de autocorrelação, noção de estacionariedade, definição de quantil, modelos ARIMA e os testes pertinentes ao processo de análise de séries temporais.

### 2.1 Função de autocorrelação e autocovariância

Algumas funções, como as de autocorrelação e de autocovariância, são importantes ferramentas para esclarecer o que acontece dentro e entre séries temporais (Shumway;Stoffer, 2010). A autocovariância, indica a dependência entre as observações. Já a função de autocorrelação revela o grau de relação entre as observações. Esses fatores ajudam a instruir sobre qual modelo pode ser mais apropriado à série estudada.

### 2.2 Estacionariedade

Uma série temporal é a realização de um processo estocástico que consiste em um agrupamento de observações ordenadas em relação ao tempo. Um dos pressupostos para realizar a análise de uma série é que o processo seja estacionário, ou seja, onde se constata a oscilação dos dados em torno de uma média constante, verificando, assim, um desvio padrão também constante.

A maior dificuldade encontrada é o fato de a maioria das séries não serem consideradas estacionárias. Esse obstáculo pode gerar problemas para a análise estatística.

Um processo será estritamente estacionário quando toda a distribuição multivariada não se alterar sobre translações no tempo, como mostra abaixo:

$$P(X_{t_1} < c_1, \dots, X_{t_k} < c_k) = P(X_{t_1+h} < c_1, \dots, X_{t_k+h} < c_k).$$

Outra consequência será em relação à autocovariância:

$$\gamma(t_1 + t, t_2 + t) = \gamma(t_1, t_2).$$

Em outra situação, um processo estocástico pode ser dito fracamente estacionário ou de segunda ordem se, e somente se:

- i)  $E(Z(t)) = \alpha, \forall t \in T$ ;
- ii)  $E(Z^2(t)) < \infty, \forall t \in T$ ;
- iii)  $\gamma(t_1, t_2) = \text{COV}(Z(t_1), Z(t_2))$ , função de  $|t_1 - t_2|$ .

Genericamente, essa classe de processos é chamada apenas de processo estacionário. Se  $Z_t$  for estritamente estacionário, não necessariamente é considerado fracamente estacionário, pois a condição de  $E(Z^2(t)) < \infty, \forall t \in T$ , pode não ser satisfeita. Porém, quando essa condição está satisfeita denomina-se processo estacionário de segunda ordem (Morettin, 2011).

Diversas vezes, são necessárias algumas transformações na série para se alcançar a estacionariedade. Com isso, algumas diferenças entre as observações são realizadas. Em certas situações, são necessárias mais de uma diferença para se obter a série desejada:

$$\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t - 1);$$

$$\Delta^2 Z(t) = \Delta[\Delta Z(t)];$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n Z(t) = \Delta[\Delta^{n-1} Z(t)].$$

Acima, tem-se, por indução, o termo geral empregado para a transformação da série. A primeira fórmula mostra a primeira diferença, a segunda fórmula mostra a segunda diferença e a terceira a  $n$ -ésima diferença.

## 2.3 Retorno de Ativos

Existem, no campo da economia, diversas variáveis que estão constantemente expostas a cotações diárias (como no mercado de ações) e a taxas mensais. Gerando, assim, numerosas séries temporais.

O estudo sobre séries econômicas tem sido crescente com o passar dos anos. Uma das finalidades desse estudo em finanças é a avaliação de risco em uma carteira de

ativos, medindo, assim, a variação dos preços desses ativos. Com um enfoque econômico, um ativo é classificado como um recurso que é fruto de eventos passados e que pode acarretar benefícios futuros para a entidade que o controla.

Segundo Morettin (2011), torna-se mais adequado trabalhar com o retorno de ativos por proporcionar estatísticas mais interessantes e por ser livre de escala. Supondo  $P_t$  o preço de um ativo no instante  $t$ , então, o retorno líquido simples será:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}.$$

O retorno bruto simples será:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \Rightarrow R_t + 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Para definir o retorno composto continuamente (log-retorno), denota-se  $p_t = \log(P_t)$ .

Com isso, tem-se que:

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}.$$

Para dados financeiros, os log-retornos estabilizam a variância e tornam o processo estacionário.

## 2.4 Características Importantes

Ao se deparar com séries econômicas, existem algumas características que são importantes e que precisam de maior atenção. Entre elas, tais como: tendência, sazonalidade e volatilidade.

A tendência deve ser evitada. Por meio das diferenças entre as observações, o efeito da tendência pode ser eliminado.

A sazonalidade é observada quando, em um período de tempo, uma situação se repete por alguns ciclos, mostrando assim um padrão. Existem métodos que ajudam a eliminar esse efeito padrão.

A volatilidade pode ser vista como uma medida de risco, pois mostra a frequência de oscilações nos preços de um ativo, em um intervalo de tempo. Logo, quando em um curto intervalo de tempo existem muitas oscilações, torna-se arriscado investir no ativo em questão.

## 2.5 Identificação

Segundo Shumway e Stoffer(2010), algumas funções, como a de autocorrelação e de autocovariância, são importantes ferramentas para esclarecer o que acontece dentro

e entre séries temporais. A autocorrelação revela o grau de relação entre as observações, já a função de autocovariância indica a dependência entre as observações. Esses fatores ajudam a instruir sobre qual modelo pode ser mais apropriado à série estudada.

A função de autocorrelação (FAC) mede a previsibilidade linear da série no tempo  $t$ , utilizando somente  $X(s)$  para prever  $X(t)$ :

$$\rho(s, t) = \frac{\gamma(s, t)}{\sqrt{\gamma_x(s, s)\gamma_y(t, t)}}.$$

Outra função de extrema importância para a identificação é a função de autocorrelação parcial (FACP), onde os efeitos de outras observações serão eliminados da correlação:

$$\phi_{kk} = \text{Corr}(X_t, X_{t-1}/X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1})$$

Neste caso, na correlação entre  $X_t$  e  $X_{t-1}$ , os efeitos de  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$  são eliminados.

O objetivo da identificação é definir as ordens  $p$ ,  $d$  e  $q$  do modelo ARIMA( $p, d, q$ ), com o auxílio da FAC e FACP. O processo de identificação compõe-se por:

- Investigar se existe a necessidade de transformação na série (por meio das diferenças, retornos e log-retornos) até obter-se uma série estacionária;
- identificar um processo AR( $p$ ), onde a FAC tem um decréscimo exponencial e/ou senoidal amortecida e a FACP contém um corte brusco para zero no "Lag"  $k \leq p+1$ ;
- identificar um processo MA( $q$ ), onde a FAC tem um corte brusco para zero no "Lag"  $K \leq q+1$  e a FACP tem um decréscimo exponencial e/ou senoidal;
- identificar um processo ARMA( $p, q$ ), onde a FAC é infinita em extensão e tem um decréscimo exponencial e/ou senoidal amortecida após o "Lag"  $q - p$  e a FACP tem um decréscimo exponencial e/ou senoidal.

## 2.6 Ruído Branco

É uma coleção de variáveis aleatórias não correlacionadas com média 0 e variância  $\sigma^2$ . Um ruído branco muito utilizado é o Ruído branco Gaussiano, onde as observações são variáveis aleatórias independentes. Pode-se dizer que  $\epsilon_t$ ,  $t \in Z$  será um ruído branco se as variáveis aleatórias não são correlacionadas.

$$\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0, t \neq s.$$

$$\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2).$$

## 2.7 Método de Máxima Verossimilhança

A estimativa por máxima verossimilhança, também conhecida como *maximum-likelihood estimation* (MLE), é usada para estimar diferentes parâmetros de um modelo. Tomando uma amostra de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$ , com função de densidade  $f(x|\theta)$ , em que  $\theta \in \Theta$ , sendo  $\Theta$  o espaço paramétrico, a função de máxima verossimilhança de  $\theta$  é dada por:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

O objetivo deste método é encontrar o valor de  $\hat{\theta} \in \Theta$  que maximiza a função de verossimilhança  $L(\theta; x)$ . Por ser uma função contínua, crescente e transformar o produto de funções em soma de funções, o logaritmo natural da função de verossimilhança pode ser utilizado como a função a ser maximizada. Sua forma, mais simples, segue abaixo:

$$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \log L(\theta; x_1, \dots, x_n).$$

No caso de uma série de observações com uma estrutura de correlação serial, a verossimilhança pode ser escrita, por exemplo, como:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1; \theta) \prod_{t=2}^n f(x_t|x_1, \dots, x_{t-1}; \theta).$$

## 2.8 AIC e BIC

Em séries temporais é corriqueiro usar modelos estatísticos para explicar um fenômeno. Frequentemente, mais de um modelo pode se mostrar adequado para descrever o que se deseja. Quando isso acontece, é necessário escolher qual modelo será utilizado para representar os dados. O Critério de Informação de Akaike (AIC) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) são muito conhecidos e aplicados nesse sentido.

O modelo que apresentar a menor medida, dentre os dois critérios, será considerado o mais adequado aos dados. O AIC é um critério que avalia a qualidade do ajuste, no modelo paramétrico, estimado pelo método de máxima verossimilhança e é definido da seguinte maneira:

$$AIC = -2 \log f(x|\hat{\theta}) + 2k,$$

onde  $k$  é o número de parâmetros.

O primeiro termo é uma recompensa por uma melhor adequação aos dados, em que  $f(x|\hat{\theta})$  é a função de máxima verossimilhança do modelo e o segundo termo é uma penalização, que é maior à medida que a ordem  $k$  aumenta.

O BIC, por sua vez, é um critério que avalia os modelos por meio da probabilidade a posteriori. Esse foi proposto por Schwarz (1978), e por constituir-se da probabilidade a posteriori foi chamado pelo autor de Critério de Informação Bayesiano. Sua fórmula matemática é dada por:

$$BIC = -2 \log f(x_n | \hat{\theta}) + k \log(n),$$

onde  $\hat{\theta}$  é o estimador de máxima verossimilhança para o  $k$ -ésimo vetor paramétrico  $\theta$  do modelo  $f_i(x_n | \theta)$ .

## 2.9 Função Acumulada Empírica

Tomando  $n$  observações de uma variável aleatória quantitativa e um número  $x$  real, tem-se que  $N(x)$  é o número de observações menores ou iguais a  $x$ . Com isso, a função acumulada empírica é definida da seguinte forma:

$$F_e(x) = F_n(x) = \frac{N(x)}{n}.$$

## 2.10 Função Acumulada

Uma maneira de buscarmos uma distribuição que melhor se ajuste a um determinado banco de dados é olharmos, por vezes graficamente, para a função distribuição acumulada.

A partir da função de distribuição acumulada (fda), também conhecida como função de distribuição, pode-se calcular as probabilidades associadas a uma variável aleatória contínua. Sua fórmula matemática é dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

A Função de distribuição satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ ;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ;
- Se  $a < b \Rightarrow F_X(a) < F_X(b)$ .

A função de distribuição acumulada que estiver mais próxima da distribuição acumulada empírica será a distribuição que melhor se adequará ao banco de dados.

## 2.11 Quantis

Os quantis são alguns pontos estipulados em intervalos regulares de uma variável aleatória, em relação à função de distribuição acumulada. Como exemplo, a mediana é o quantil de ordem 0,5 pois acumula 50% da probabilidade de uma variável aleatória. Se denotarmos por  $p_i$  uma probabilidade qualquer, podemos obter o respectivo quantil (que acumula a probabilidade  $p_i$ ) invertendo a função de distribuição acumulada:

$$x_i = F^{-1}(p_i), \text{ onde } i = 1, \dots, n.$$

## 2.12 Médias Móveis

Esse mecanismo é extremamente importante para suavizar os movimentos e oscilações das observações na série. A partir disso, será estabelecida uma nova série descrita por uma média levando em consideração a dependência dos ruídos passados.

$$v_t = \frac{1}{3}(w_{t-1} + w_t + w_{t+1});$$

$$X_t = \mu + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\epsilon_{t-q}.$$

## 2.13 Modelo Autoregressivo

Ao pensar em regressão, logo se compreende um conjunto de variáveis independentes explicando uma variável dependente. O modelo autorregressivo segue o mesmo raciocínio. Contudo, levando em consideração o tempo:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t.$$

Com o estudo de análise de regressão, observa-se que os parâmetros são definidos por  $\phi$ . Eles indicam o quanto a variável aleatória muda a cada uma unidade de variação.

## 2.14 ARMA(p,q)

O modelo ARMA se caracteriza por ser um modelo autorregressivo e de médias móveis o qual atribuímos uma ordem (p,q). Os erros são supostos ruído branco com média zero e variância  $\sigma^2$ .

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \epsilon_t - \theta_1\epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\epsilon_{t-q}.$$

O modelo ARMA(p,q) tem como base o passado da variável aleatória e tem como propósito a previsão. Essas previsões podem ser a curto e a longo prazo, dependendo do banco de dados.

Para a análise estatística, os critérios AIC e BIC servem como uma indicação do grau de ajustamento do modelo.

## 2.15 ARIMA(p,d,q)

Quando a série temporal não é estacionária, são conduzidas algumas diferenças na série com o objetivo de torná-la uma série estacionária. Dessa forma, um modelo autorregressivo, integrado e de médias móveis passa a ser uma ótima alternativa por conta de suas propriedades.

$$Z_t = \text{série não estacionária};$$

$$W_t = \Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}.$$

As previsões com o modelo ARIMA(p,d,q) minimizam o erro quadrático médio de previsão.

A identificação do modelo ARIMA(p,d,q) a ser ajustado aos dados é feita com base na função de autocorrelação e autocorrelação parcial estimadas. E se espera que representem as respectivas quantidades teóricas.

## 2.16 Distribuição Normal

A distribuição Normal (ou Gaussiana) é um modelo fundamental em análises estatísticas. Sua primeira publicação foi realizada pelo matemático Abraham de Moivre em 1733. Apesar de muito utilizada, pesquisas recentes apontam que a hipótese de normalidade dos dados financeiros faz com que os eventos extremos sejam desprezados (caso comum em ativos financeiros).

Se a variável aleatória (v.a.)  $X$  tem distribuição Normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ , onde  $-\infty < \mu < \infty$  e  $0 < \sigma^2 < \infty$ . Então, sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

onde  $-\infty < x < \infty$ .

Sua assimetria e curtose são dadas pelas seguintes fórmulas:

$$A(X) = E\left(\frac{(x-\mu)^3}{\sigma^3}\right);$$



$$K(X) = E \left( \frac{(x - \mu)^4}{\sigma^4} \right).$$

A partir desses conceitos, se uma variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal, então  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Com isso, sua assimetria e curtose serão:

$$A(X) = 0 \text{ e } K(X) = 3.$$

## 2.17 Distribuição t de Student

A distribuição t de Student é muito usada na modelagem estatística. É simétrica e tem forma de sino, assim como a distribuição normal, porém tem caudas mais pesadas. Segundo Casella e Berger (2011), uma variável aleatória  $T$  tem distribuição t de Student com  $p$  graus de liberdade, e escreve-se que  $T \sim t_p$  se tiver uma função densidade de probabilidade igual a:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\frac{v}{2} \sqrt{\pi v}} \left( 1 + \frac{t^2}{v} \right)^{-\frac{v+1}{2}}, -\infty < x < \infty \text{ e } p > 0.$$

A esperança matemática, a média e a moda de  $t$  são iguais a 0. E sua variância é igual a  $\frac{p}{(p-2)}$ . Além disso, quanto maior for o valor do grau de liberdade, mais próximo a  $t$  de Student estará da distribuição normal.

Sua assimetria e curtose são:

$$A(v) = 0, \text{ se } v > 3;$$

$$K(v) = \frac{6}{v-4}, \text{ para } v > 4.$$

## 2.18 Distribuição Laplace

A distribuição Laplace é uma distribuição de probabilidade contínua que teve sua primeira publicação em 1774, pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace. Também leva o nome de distribuição exponencial dupla, porém, é menos usual.

Se  $X$  é uma variável aleatória que segue uma distribuição Laplace com parâmetros  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $b > 0$  (com variância igual a  $2b^2$  e média  $\mu$ ), então,  $X \sim L(\mu, b)$  e sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{(-\frac{|x-\mu|}{b})}.$$

Sua assimetria e curtose são:

$$A(X) = 0;$$

$$K(X) = 6.$$

## 2.19 Distribuições Estáveis

O matemático Paul Pierre Lévy, por volta de 1924 com seu estudo de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, descobriu uma nova classe de distribuições de probabilidade: as distribuições estáveis.

As propriedades dessa classe de distribuição permite assimetria, caudas pesadas e alta curtose. Essas características são muito eficientes em aproximações para dados financeiros por possibilitar a modelagem com valores mais extremos.

As distribuições estáveis são uma generalização do Teorema do Limite Central quando retira-se a hipótese de variância finita. A forma mais simples de representar as distribuições é por meio da função característica. Supondo  $X$  uma variável aleatória que segue uma distribuição estável, ou seja  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ , sua função característica é dada por:

$$\ln \Phi_X(t) = \begin{cases} it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[ 1 - i\beta \text{sinal}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right], & \text{se } \alpha \neq 1, \\ it\mu - \sigma |t| [1 + i\beta \text{sinal}(t) \ln(t)], & \text{se } \alpha = 1, \end{cases}$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $\sigma > 0$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ . A função  $\text{sinal}(t)$  é definida por

$$\text{sinal}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

O parâmetro  $\alpha$  é o índice de instabilidade,  $\beta$  é o parâmetro de assimetria,  $\sigma$  é o parâmetro de escala e  $\mu$  é o parâmetro de locação. Por meio desses parâmetros é possível visualizar uma variável aleatória. De acordo com alguns desses resultados as distribuições estáveis podem ser escritas da seguinte forma:

- Distribuição Gaussiana

Quando  $\alpha = 2$ , a função característica da distribuição estável assemelha-se à função característica da Normal e é dada por:

$$\Phi(t) = \exp\{i\mu t - \sigma^2 t^2\},$$

- Distribuição de Cauchy

Quando  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , a função característica da distribuição estável assemelha-se à função característica da Cauchy denotada por:

$$\Phi(t) = \exp\{i\mu t - \sigma|t|\},$$

- Distribuição de Lévy

Quando  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = \pm 1$ , a função característica assemelha-se à função característica da distribuição de Lévy dada por:

$$\Phi(t) = \exp\{i\mu t - \sqrt{\sigma|t|}[1 - i\text{sign}(t)]\},$$

com densidade:

$$f(x; \mu, \sigma) = \sqrt{\frac{\sigma/2\pi}{(x - \mu)^3}} e^{-\frac{\sigma}{2(x - \mu)}}, \quad \forall x > \mu.$$

As Figuras 2.1 e 2.2 exibem alguns resultados possíveis para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ . Em particular, se  $\alpha = 2$ , então a variável aleatória estável tem distribuição  $N(\mu, 2\sigma^2)$ .

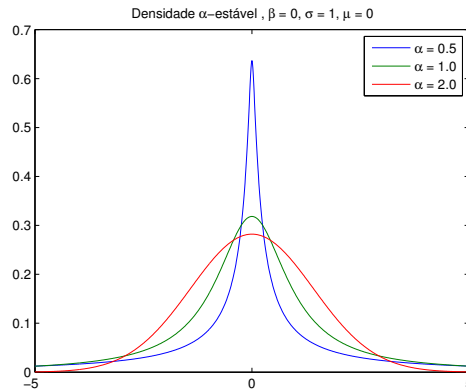


Figura 2.1: Índice de estabilidade

As Figuras 2.3 e 2.4 indicam alguns resultados dos parâmetros  $\sigma$  e  $\mu$ . Se  $1 < \alpha < 2$ , então a média da distribuição é  $\mu$ , caso contrário, a distribuição não possui uma tendência central.

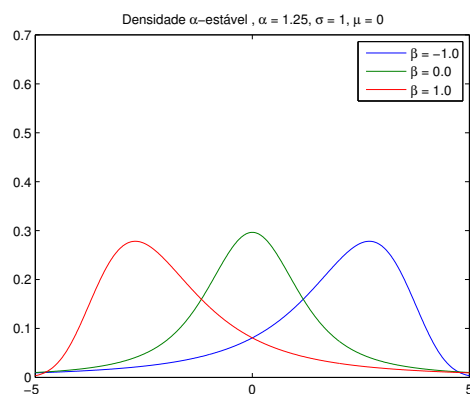


Figura 2.2: Parâmetro de assimetria

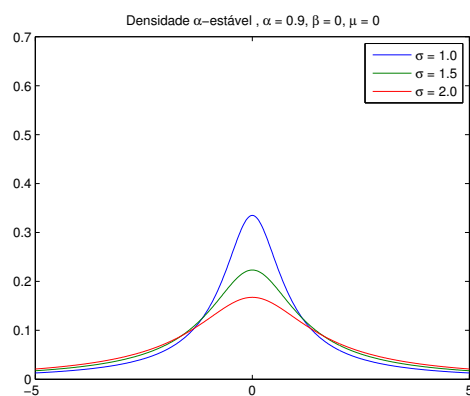


Figura 2.3: Parâmetro de escala

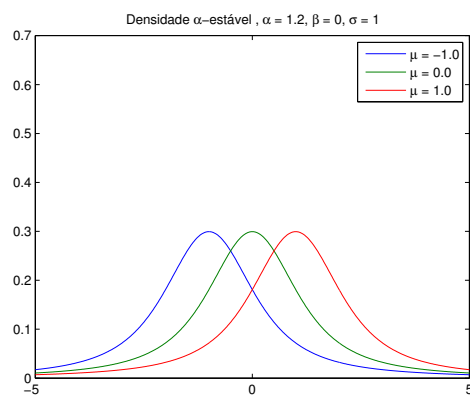


Figura 2.4: Parâmetro de posição

## 2.20 Teste de Box-Ljung-Pierce

Ljung e Box, em 1978, sugeriram uma alteração do teste de Box-Pierce, que deu o nome ao novo teste. Esse recurso é muito implementado em análise de séries temporais residuais após o ajuste de um modelo  $ARIMA(p,d,q)$ . Suas hipóteses são:

$H_0$  : Os resíduos são ruído branco.

$H_a$  : Os resíduos não são ruído branco.

Assim, quando a hipótese nula é rejeitada, há um indicativo de que o modelo tem falhas no ajuste. Se o modelo for apropriado, a estatística do teste é dada por:

$$Q(K) = n(n+1) \sum_{j=1}^K \frac{\hat{r}_j^2}{(n-j)}.$$

Essa estatística terá, aproximadamente, uma distribuição  $\chi^2$  com  $K - p - q$  graus de liberdade.

## 2.21 Teste de Kolmogorov-Smirnov

Proposto pelos matemáticos Andrei Nikolaevich Kolmogorov e Vladimir Ivanovich Smirnov, o teste de Kolmogorov-Smirnov é um teste não paramétrico que tem como finalidade testar se a distribuição de probabilidade de uma população em que os dados são amostrados adere ou não a uma distribuição teórica proposta. Suas hipóteses são denotadas por:

$H_0$  : Os dados seguem a distribuição de probabilidade proposta.

$H_1$  : Os dados não seguem a distribuição de probabilidade proposta.

Quando a hipótese nula é rejeitada, há um indicativo de que os dados não seguem a distribuição de probabilidade proposta. A estatística do teste é dada por:

$$D_n = \sup_X |F_n(X) - F(X)|.$$

Para  $n$  observações independentes e identicamente distribuídas, a função de distribuição empírica  $F_n(X)$  é definida por:

$$F_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, X]}(X_i),$$

onde  $I_{X_i \leq x}$  é a função indicadora.



# Capítulo 3

## Resultados e Discussões

### 3.1 Análise dos Ativos Financeiros (Usim5)

É possível se deparar com séries temporais em inúmeras áreas da ciência. Segundo Morettin (2011), ao analisar dados financeiros, é corriqueiro perceber uma característica bastante notável nos ativos financeiros denominada de volatilidade. Esse traço mostra o desvio padrão condicional de uma variável, que não é diretamente observável.

O banco de dados utilizado é do ativo da Usiminas (USIM5), que contém cerca de 3899 observações obtidas do site *Yahoo Finance*, que vão de 19 de junho de 2000 a 22 de março de 2016. Fazendo uso de ferramentas estatísticas, é possível analisar a relação e dependências das observações, além de prever valores. E, para prosseguir com a investigação sobre os dados, a suposição de estacionariedade deve ser verdadeira.

As séries, comumente, não são consideradas estacionárias, ou seja, não se desenvolvem aleatoriamente, no tempo, ao redor de uma média constante. Como a série que está sendo tratada não satisfaz a suposição de estacionariedade, foi realizada uma transformação utilizando o log-retorno do ativo, pois ao se explorar séries temporais financeiras é habitual o uso de log-retornos. Isso acontece devido ao fato de serem variáveis aleatórias livres de escala e com propriedades estatísticas mais interessantes (Morettin, 2011).

As Figuras 3.1 e 3.2 representam dois tipos de séries: a primeira é com o preço de fechamento diário (não estacionária) e, em seguida, a série modificada (estacionária).

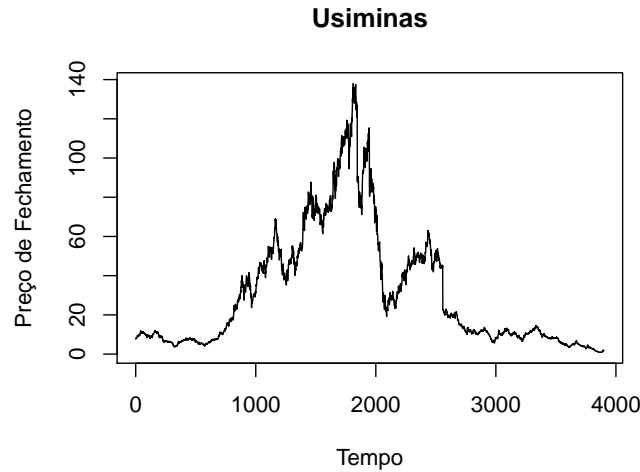


Figura 3.1: Preço de fechamento do ativo (Usim5).

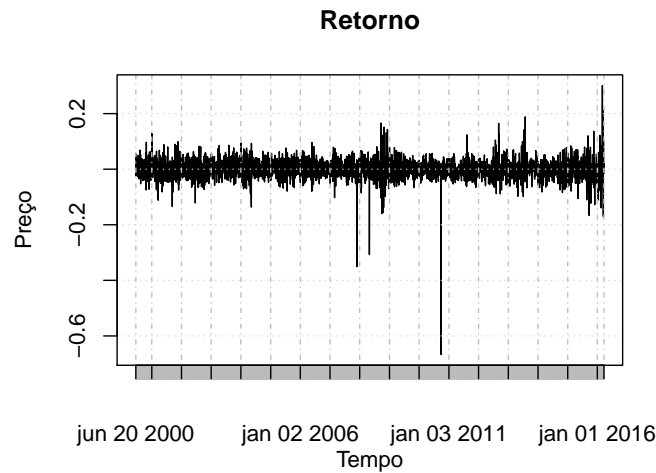


Figura 3.2: Log-retornos do ativo (Usim5).

A partir da Figura 3.2, observa-se uma série com oscilação em torno de uma média constante (característica presente em séries estacionárias). Também observa-se a existência de algumas quebras estruturais. A primeira delas acontece no dia 28 de novembro de 2007 e a segunda, dia 30 de junho de 2008. Nesse período, o Brasil sofria as consequências da crise do *subprime*. Essa crise ocorreu devido à queda do Índice *Dow Jones*, que foi provocado pela permissão de empréstimos hipotecários de alto risco e que gerou falência de vários bancos. A terceira quebra estrutural ocorre no dia 28 de novembro de 2010 e é resultado da crise europeia. A causa dessa crise é uma consequência da dificuldade de alguns países europeus pagarem suas dívidas. Com isso, o mercado de ações sofreu com as implicações geradas pela crise.

Uma forma de identificar o modelo apropriado para os dados em questão é ave-



riguarmos o comportamento das funções de autocorrelação (FAC) e função autocorrelação parcial (FACP).

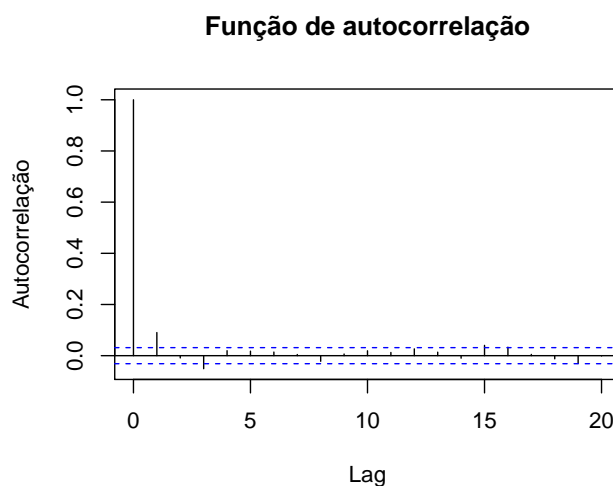


Figura 3.3: Função de autocorrelação dos resíduos.

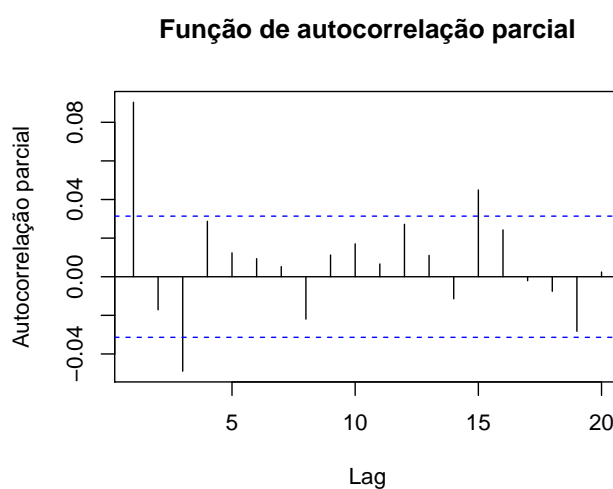


Figura 3.4: Função de autocorrelação parcial dos resíduos.

De acordo com a Figura 3.3 e Figura 3.4, observa-se que a função de autocorrelação adquire um decaimento rápido para zero e que os "Lags" 1 e 3 saem do intervalo de confiança. A função de autocorrelação parcial também indica que os "Lags" 1 e 3 devem ser investigados. Com base nos resultados dos gráficos, foram estimados alguns possíveis modelos, com ordem até 3 para AR e ordem até 4 para MA.

Tabela 3.1: Possibilidades de modelos ARMA com seus respectivos AIC, BIC e teste de Box-Ljung-Pierce.

	AR	MA	AIC	BIC	Box-Ljung-Pierce
1	1	1	-15100.93	-15075.86	0.9995415
2	1	2	-15098.94	-15067.60	0.9870238
3	1	3	-15109.20	-15071.59	0.9946508
4	1	4	-15113.69	-15069.81	0.9852786
5	2	1	-15101.56	-15070.22	0.9299352
6	2	2	-15107.66	-15070.05	0.8911677
7	2	3	-15107.51	-15063.63	0.9977444
8	2	4	-15111.55	-15061.40	0.9858423
9	3	1	-15108.94	-15071.33	0.9874519
10	3	2	-15107.60	-15063.72	0.9979454
11	3	3	-15105.66	-15055.52	0.9935936
12	3	4	-15119.49	-15063.07	0.9332168

A partir da Tabela 3.1, uma seleção é realizada de acordo com os resultados do teste de Box-Ljung-Pierce. Nesse caso, é de interesse averiguar se os modelos rejeitam a hipótese nula de que os resíduos são ruído branco. Afinal, é importante que exista correlação entre as observações. Com isso, nenhum dos modelos são descartados da análise.

Em seguida, analisamos os critérios AIC e BIC das observações restantes e observamos se os parâmetros são significativos. A estimativa dos parâmetros é efetuada pelo método da máxima verossimilhança em vista das propriedades assintóticas. Então, segundo os critérios citados o modelo escolhido é o ARMA(2,1). O resultado da estimativa está representado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Coeficientes do modelo ARMA(2,1).

	AR (1)	AR(2)	MA(1)
Coeficiente	0.4828	-0.0614	-0.3903
Desvio Padrão	0.2444	0.0256	0.2443

É realizado um estudo, no intuito de verificar o comportamento dos resíduos, onde se ajusta o modelo ARMA(2,1) com quatro diferentes distribuições de probabilidade: a Normal, t de Student, Laplace e  $\alpha$ -estável. Ao examinar o banco de dados, a curtose é observada e seu resultado é de aproximadamente 43,44 (extremamente alto, se comparado com a curtose da Normal, que é 3). Isso indica que os log-retornos das ações aderem a uma distribuição de probabilidades leptocúrtica, ou seja, com alta curtose. Esse fato, adicionado ao conhecimento de que dados financeiros costumam apresentar caudas pesadas, motivou o uso das distribuições t de Student, Laplace e  $\alpha$ -estável. Nas figuras abaixo, é possível verificar a densidade de cada distribuição de probabilidade, conjuntamente ao histograma dos log-retornos do ativo.

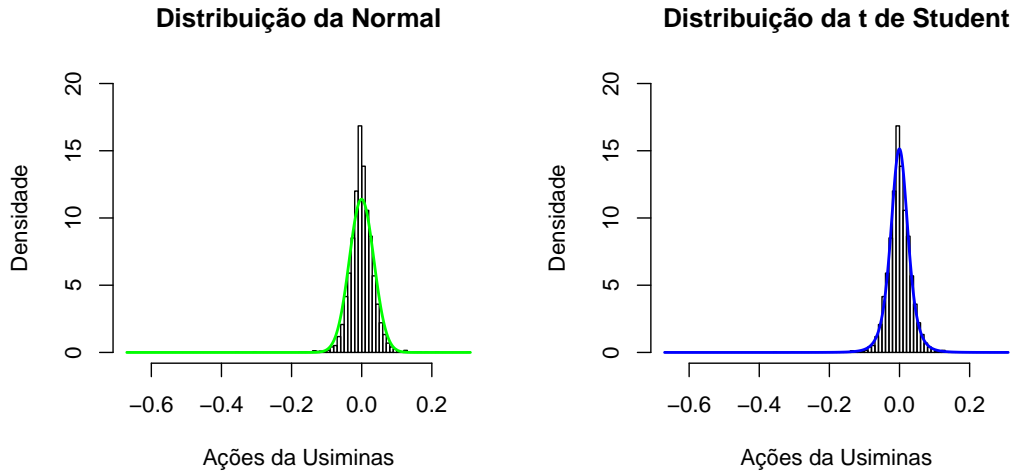


Figura 3.5: Função de densidade da Normal e t de Student ajustada ao histograma dos log-retornos.

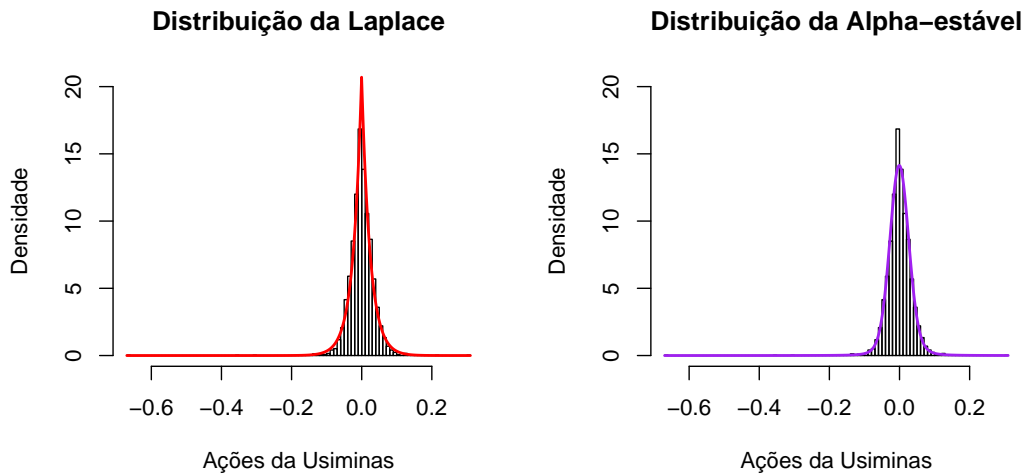


Figura 3.6: Função de densidade Laplace e  $\alpha$ -estável ajustadas ao histograma dos log-retorno.

### 3.1.1 Distribuição Normal

A distribuição Normal possui sustentação em dois grandes resultados na teoria da probabilidade: o Teorema do Limite Central e a Lei Forte dos Grandes Números (Ross, 2010). Devido a essas características, torna-se interessante ajustar o modelo escolhido a essa distribuição de probabilidade. Os parâmetros, por meio desse ajuste, também podem ser estimados usando o método da máxima verossimilhança. Segue abaixo as estimativas do modelo ajustado à distribuição de probabilidade Normal.

Tabela 3.3: Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição normal.

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Coeficiente	-0.0003360186	0.0348460540

A estimativa dos parâmetros do modelo ARMA(2,1), ajustado à distribuição Normal, é efetuada pelo método de máxima verossimilhança. O resultado é o mesmo que se encontra na Tabela 3.2. Uma ferramenta muito útil para a análise é o gráfico quantil-quantil, pois verifica a adequação da distribuição de probabilidade em relação aos dados. Esse recurso é muito utilizado na análise de resíduo em modelos de regressão. Alguns padrões do gráfico em tela respeita as características do banco de dados, tais como assimetria e curtose. A interpretação do gráfico se dá por meio da disposição dos pontos em torno da reta. Quando os pontos se encontram muito próximos à reta, existe um indicativo de que os dados seguem a distribuição de probabilidade proposta.

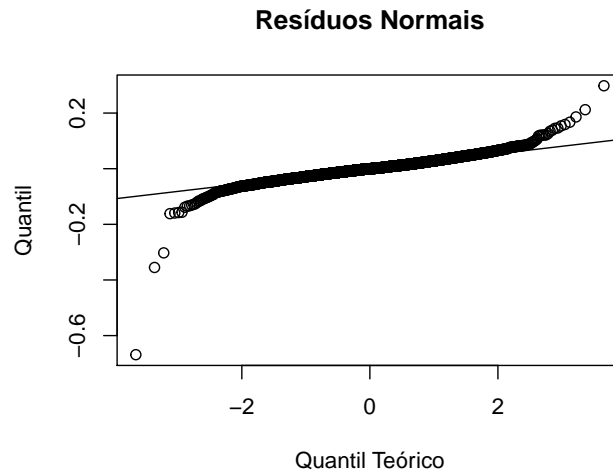


Figura 3.7: Gráfico quantil-quantil com resíduos ajustados na distribuição Normal do modelo ARMA(2,1).

Pode-se supor, por meio da Figura 3.7, que os dados não parecem estar bem ajustados à reta. Pois, quando se trata de análise financeira, é de extremo interesse analisar o risco de um possível investimento. Por essa razão, as extremidades devem ser melhor investigadas. Nesse caso, se evidencia que as extremidades podem apresentar um certo risco ao investidor por apresentarem maior dispersão dos dados em relação à reta.

### 3.1.2 Distribuição t de Student

A distribuição t de Student é semelhante à distribuição Normal, porém, possui cauda mais pesada. Por essa razão, pode-se observar que eventos extremos têm probabilidade maior de acontecer.

A partir desse ajuste, a Tabela 3.4 mostra o resultado das estimativas dos parâmetros do modelo ajustado com distribuição t de Student.

Tabela 3.4: Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição t de Student.

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	gl
Coeficiente	-0.0003552611	0.0250069439	4.0539968027

As estimativas dos parâmetros do modelo ARMA(2,1), ajustado para a distribuição t de Student, é realizada pelo método de máxima verossimilhança condicional e seu resultado está representado na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Coeficientes do modelo ARMA(2,1) ajustado na distribuição t de Student.

	AR (1)	AR(2)	MA(1)
Coeficiente	-0.7480502	-0.0614000	-0.3897747

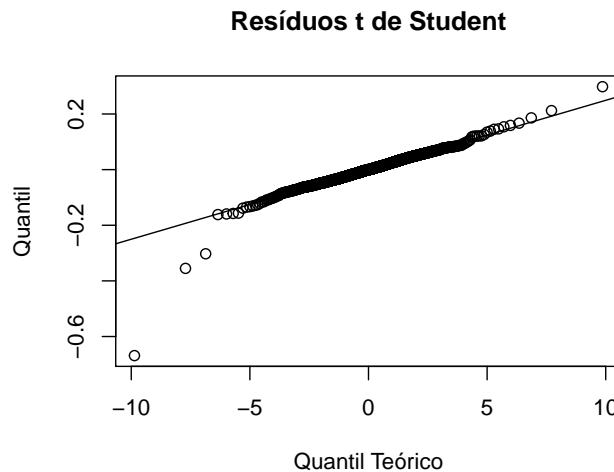


Figura 3.8: Gráfico quantil-quantil com resíduos ajustados na distribuição t de Student do modelo ARMA(2,1).

O gráfico quantil-quantil dos resíduos, ajustados à distribuição t de Student (Figura 3.8), sugere uma melhor adequação dos dados em relação à distribuição Normal. No entanto, pode-se identificar nas extremidades que alguns pontos se encontram distantes da reta. Porém, são poucas as observações que demonstram essa característica.

### 3.1.3 Distribuição Laplace

A distribuição Laplace, também chamada de distribuição exponencial dupla, apresenta uma densidade com caudas pesadas e curtose alta. Com isso, a aplicação dessa distribuição aos dados dos log-retornos da Usiminas se torna relevante.

A partir disso, os parâmetros foram estimados usando o método de máxima verossimilhança condicional com o modelo ajustado à distribuição Laplace, como mostra na Tabela 3.6.

Tabela 3.6: Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição Laplace.

	$\hat{\mu}$	$\hat{b}$
Coeficiente	-0.0003127420	0.0240594593

Verifica-se, na Tabela 3.7, o resultado dos parâmetros do modelo ARMA(2,1) ajustados na distribuição de probabilidade Laplace.

Tabela 3.7: Coeficientes do modelo ARMA(2,1) ajustado na distribuição Laplace.

	AR (1)	AR(2)	MA(1)
Coeficiente	-0.735333	-0.061400	-0.385548

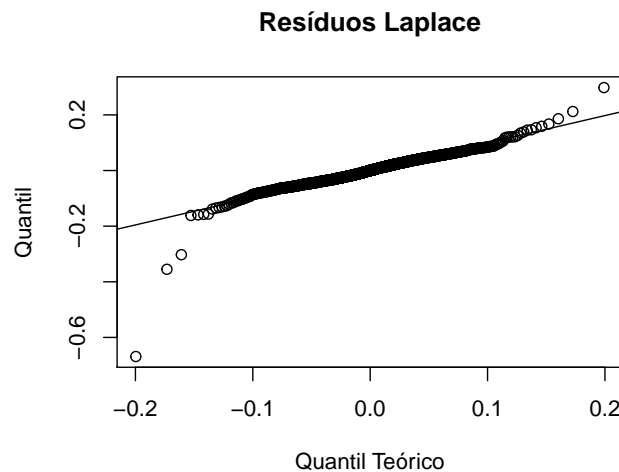


Figura 3.9: Gráfico quantil-quantil com resíduos ajustados na distribuição Laplace do modelo ARMA(2,1).

Analisando o gráfico quantil-quantil, com ajuste dos resíduos na distribuição Laplace (Figura 3.9), o risco nas extremidades é semelhante ao caso da t de Student. Pois, os pontos parecem se acomodar no meio da reta. No entanto, ao observar as extremidades, percebe-se pontos discrepantes e distantes.

### 3.1.4 Distribuição $\alpha$ -estável

A distribuição  $\alpha$ -estável possui diversas propriedades que a torna muito útil em aplicações no mercado financeiro e na física, por permitir características como assimetria e caudas pesadas. Para completar a análise, foi realizado um ajuste nos resíduos usando essa distribuição.

Os parâmetros foram estimados usando o método de máxima verossimilhança, e seus resultados se encontram na Tabela 3.8.

Tabela 3.8: Coeficientes do modelo ajustado em uma distribuição  $\alpha$ -estável.

	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\mu$
Coeficiente	1.80833768373	0.0929442451	0.020014252	-0.0006570681

Os valores, obtidos das estimativas dos parâmetros do modelo ajustado com distribuição  $\alpha$ -estável, encontram-se na Tabela 3.9.

Tabela 3.9: Coeficientes do modelo ARMA(2,1) ajustado na distribuição  $\alpha$ -estável.

	AR (1)	AR(2)	MA(1)
Coeficiente	-0.7117727	-0.0614000	0.9999928

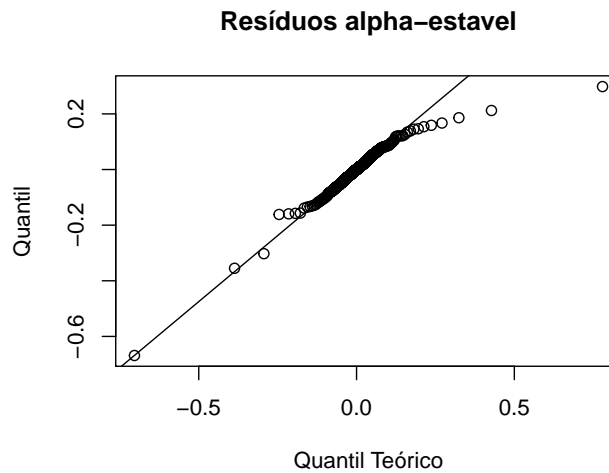


Figura 3.10: Gráfico quantil-quantil com resíduos  $\alpha$ -estável do modelo ARMA(2,1) ajustado.

A partir do Gráfico 3.10 com resíduos ajustados à distribuição  $\alpha$ -estável, observa-se a mesma característica encontrada nos gráficos da  $t$  de Student e Laplace. Nas extremidades existem pontos distantes da reta.

### 3.1.5 Funções Acumuladas e Teste de Kolmogorov-Smirnov

As funções de distribuições acumuladas auxiliam a avaliação quanto ao ajuste das distribuições para os log-retornos dos ativos financeiros, Usim5. Esse outro recurso gráfico adiciona valor na análise dos dados. Por meio dessa investigação, é possível ter uma melhor percepção sobre o ajuste das distribuições.

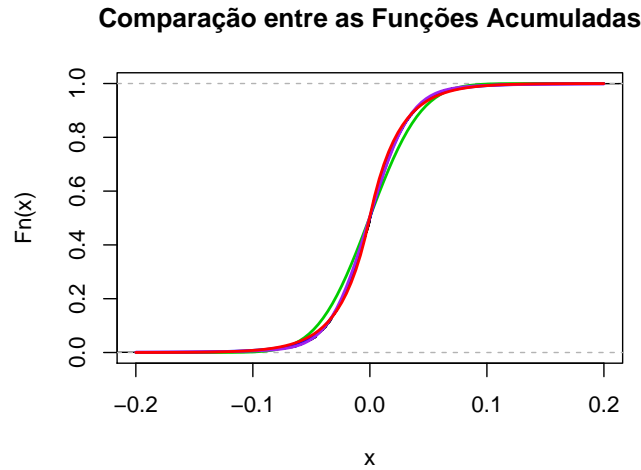


Figura 3.11: Comparação entre as distribuições acumuladas dos log-retornos (Normal em verde, t de Student em azul, Laplace em vermelho e  $\alpha$ -estável em roxo).

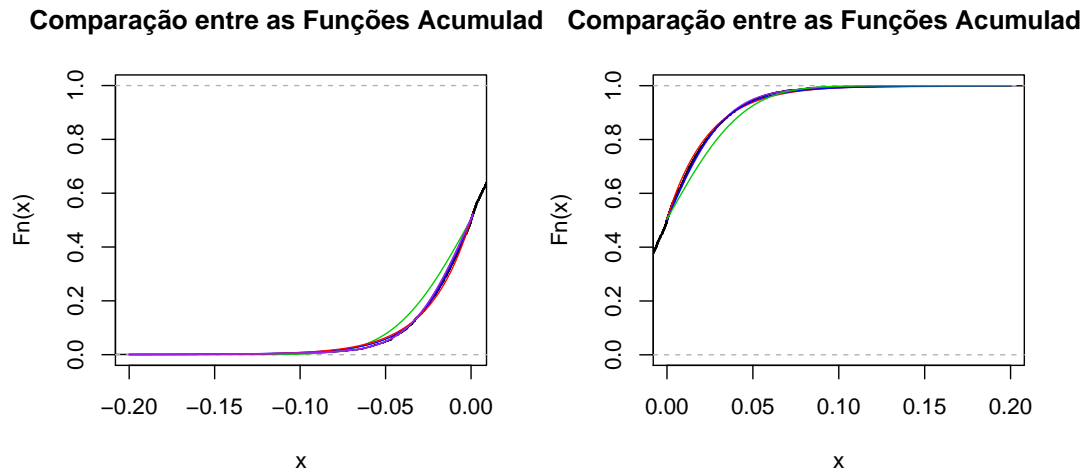


Figura 3.12: Comparação nas caudas das distribuições acumuladas dos log-retornos (Normal em verde, t de Student em azul, Laplace em vermelho e  $\alpha$ -estável em roxo).

A função de distribuição acumulada Normal (em verde) aparenta não ser um bom ajuste. Justamente nas caudas, existe uma diferença significativa em relação à função de distribuição acumulada empírica. Quanto à t de Student, Laplace e  $\alpha$ -estável (azul, vermelho e roxo, respectivamente), parece existir uma melhor aproximação.

Foi realizado o teste de kolmogorov-Smirnov para dar suporte à suposição do ajuste feito pela análise gráfica. Esse teste executa uma comparação entre a distribuição acumulada empírica com a estimada e seu resultado pode ser visto na Tabela 3.10.



Tabela 3.10: Resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov para as distribuições.

	Normal	t de Student	Laplace	$\alpha$ -estável
P-valor	2.174e-10	0.601	0.01696	0.175

A partir dos resultados da Tabela 3.10, as únicas distribuições que se ajustaram aos dados foram a t de Student e  $\alpha$ -estável. E, com o auxílio da análise gráfica sobre as funções acumuladas, já havia uma suposição de que essas distribuições fossem melhores. Quanto à Normal, seu resultado foi o esperado, rejeitando a hipótese de que os dados seguem a distribuição Normal, pois ela não permite caudas pesadas. A distribuição Laplace era uma forte candidata ao ajuste, no entanto, o resultado do teste mostrou que essa distribuição não se adequou suficientemente ao modelo ARMA(2,1). Possivelmente, outro modelo pode gerar um melhor ajuste com a Laplace.



## Capítulo 4

### Considerações Finais

O intuito deste trabalho foi realizar uma análise sobre o comportamento dos resíduos de ativos financeiros da empresa Usiminas, maior companhia siderúrgica do Brasil, em diferentes distribuições de probabilidade. Por se tratar de ações, é natural que exista a característica de cauda pesada. Por esse motivo, a comparação entre as distribuições tem grande relevância.

A escolha do modelo deu-se pelos resultados do teste de Box-Ljung-Pierce e pelo auxílio dos critérios de informação (AIC e BIC). O modelo escolhido segundo as medidas de seleção e com parâmetros significativos foi o ARMA(2,1). Baseado nisso, foi efetuado o ajuste na distribuição Normal, t de Student, Laplace e  $\alpha$ -estável. Com a finalidade de verificar a densidade que melhor se aplica ao banco de dados, foram utilizados recursos gráficos sobre as funções de distribuição de probabilidade, como o gráfico quantil-quantil e a função de distribuição acumulada. O uso do gráfico quantil-quantil e de distribuições acumuladas geraram dúvidas quanto à melhor distribuição. Nos dois casos, nota-se que a função de probabilidade Normal não seria um bom ajuste. Em contrapartida, a t de Student, Laplace e Alpha-estável mostraram-se um melhor resultado.

O teste de Kolmogorov-Smirnov foi realizado em seguida. O resultado obtido na Tabela 3.10 revela que a distribuição Normal não se ajusta aos dados, como já era esperado segundo a análise gráfica. A distribuição Laplace não teve um desempenho suficiente para se ajustar aos dados. Entretanto, a função t de Student e  $\alpha$ -estável conseguiram obter um melhor ajuste para os dados. É importante ressaltar que esse é um caso particular dos dados de log-retornos do ativo financeiro Usim5.

Uma sugestão para trabalhos futuros é o estudo e comparação de outras distribuições de probabilidade, como por exemplo a distribuição GEV (*Generalized Extreme Value*).



# Referências Bibliográficas

- [1] Bolfarine, H.; Sandoval, M. C. (2001). **Introdução á Inferência Estatística**, SBM.
- [2] Brooks, C. (2003). **The Analysis of Time Series: An Introduction**, (6 ed.). Chapman and Hall/CRC.
- [3] Brooks, C. (2008). **Introductory Econometrics for Finance**, (2 ed.). Cambridge University Press.
- [4] Chan, N. H. (2002). **Time Series: Applications to Finance**, Wiley.
- [5] Cowpertwait, P. S. P.; Metcalfe, A. V. (2009). **Introductory Time Series**, Springer.
- [6] Cryer, J. D.; Chan, K. (2008). **Time Series Analysis With Application in R**, (3 ed.). Springer.
- [7] Harvey, A. C. (1993). **Time Series Models**, (2 ed.). The MIT Press.
- [8] Morettin, P. A.; Toloi, C. M. C. (2011). **Análise de Séries Temporais**, (2 ed.). Bluncher.
- [9] Morettin, P. A. (2011). **Econometria Financeira**, ( 2 ed.). Bluncher.
- [10] Nolan, John. **Modeling financial data with stable distributions**: Disponível em:<<http://fs2.american.edu/jpnolan/www/stable/StableFinance23Mar2005.pdf>>.
- [11] Nolan, John. **Stable Distributions** :Disponível em: <<http://academic2.american.edu/jpnolan/stable/chap1.pdf>>.
- [12] Sampaio, J. M. (2012). **Estimação indireta de modelosR-GARCH**, Universidade de São Paulo.
- [13] Shumway, R. H.; Stoffer, D.S. (2010). **Time Series Analysis and Its Applications With R Example**, (3 ed.). Springer.
- [14] Taylor, S. J. (2008). **Modelling Financial Time Series**, (2 ed.). World Scientific Publishing Company.
- [15] Triola, M. F. (2011). **Introdução á Estatística**, ( 10 ed.). LTC.

- [16] Valiño, Ronaldo (2013). **Siderurgia no Brasil**. Pwc.
- [17] Wei, W. W. S. (2005). **Time Series Analysis : Univariate and Multivariate Methods**, (2 ed.). Pearson.